Criterio della radice

Sia $\sum_{1}^{n} a_n$ una serie a termini positivi, se

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ / k < 1 : \sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$$

allora la serie $\sum_{1}^{n} a_n$ è convergente.

Ovvero se: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = h$

con **$0 \leq h < 1$**	allora la serie $\sum_{1}^{n} a_n$ è convergente
con **$h > 1$**	allora la serie $\sum_{1}^{n} a_n$ è divergente
$h = 1$	?

Esempio1

Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(arctgn)^n}$ è convergente.

Calcoliamo il limite della radice n-sima del termine generale a_n : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = h$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(arctgn)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{arctgn} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} < 1$$

e quindi la serie è convergente.

Esempio2

Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n)^n}$ è convergente.

Calcoliamo il limite della radice n-sima del termine generale a_n : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=h$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$$

e quindi la serie è convergente.

Esempio3

Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-2^{-n})$ è convergente.

Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\log(1-2^{-n})}=\lim_{n\to\infty}\left(\log(1-2^{-n})\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log(1-2^{-n})\right)=$$

Scriviamo:

$$\log(1-2^{-n})^{1/n}=e^{\log\log(1-2^{-n})^{1/n}}=e^{\frac{1}{n}\log\log(1-2^{-n})}$$

E quindi tornando al limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log(1-2^{-n})\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\log\log(1-2^{-n})}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\log(1-2^{-n})}=e^{-\log 2}=\frac{1}{2}<1$$

e quindi la serie è convergente.

Nota:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{\log(1-2^{-n})}{2^{-n}}2^{-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(2^{-n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(-n\log 2)=-2$$

Esempio4

Stabilire se la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n}$ è convergente.

Calcoliamo il limite della radice n-sima del termine generale a_n : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = h$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\log^n n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$$

e quindi la serie è convergente.